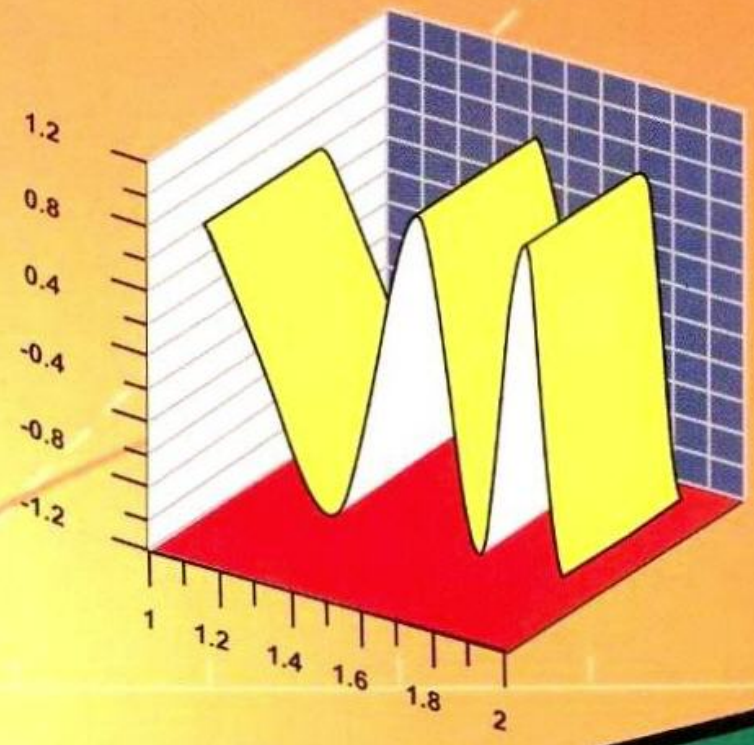
VŨ NINH GIANG



HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

GIẢI TÍCH 11

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b}}$$

ĐHQG HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA

VŨ NINH GIANG

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

GIẢI TÍCH 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Chịu trách nhiệm nội dung & bản quyền
TRUNG TÂM VĂN HOÁ TRÀNG AN

Biên tập Minh Hải
Trình bày bìa Thu Hương

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP GIẢI TÍCH 11
Mã số: 1L-168 ĐH2007

In 2000 cuốn, khổ 16x24cm, tại Côngty TNHH Nhà nước
một thành viên Khảo sát & xây dựng.
Số xuất bản: 533-2007/CXB/04-77/ĐHQGHN, ngày 10/7/2007
Quyết định xuất bản số: 383 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2007.

CHƯƠNG I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài tập

1. Hãy xác định những giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số y = tanx:

a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị bằng 1;

c) Nhận giá trị dương; d) Nhận giá trị âm.

2. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y=\frac{1+\cos x}{\sin x}$; b) $y=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;

c) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$; d) $y=\cot an\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

3. Dựa vào đồ thị của hàm số y = sinx, hãy vẽ đồ thị của hàm số y = | sinx |.

4. Chứng minh rằng sin2(x + kπ) = sin 2x với mọi số nguyên k. Từ đó vẽ đồ thị hàm số y = sin 2x.

5. Dựa vào đồ thị hàm số y = cosx, tìm các giá trị của x để $\cos x=\frac{1}{2}$.

6. Dựa trên đồ thị hàm số y = sinx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

7. Dựa trên đồ thị của hàm số y = cosx, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị âm.

8. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số: a) $y=2\sqrt{\cos x}+1$; b) y= 3 – 2sinx.

9*.[1] Chứng minh rằng với mọi x ta đều có: $\left|\frac{\cos 3x+a\sin 3x+1}{\cos 3x+2}\right|\le\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$.

10. Chứng minh rằng trong mọi Δ ABC, ta luôn có:

$$0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A < 13.$$

(Trích đề thi vào ĐH Ngoại thương - D, 1997).

---

(1) Từ bài tập có dấu (*) trở đi là bài tập bổ sung

Hướng dẫn giải

1. Căn cứ vào đồ thị hàm số y = tanx trên đoạn $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ ta tìm được y = tanx.

a) tanx = 0 tại $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$; b) tanx = 1 tại $x \in \left\{\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$;

c) tanx > 0 khi $x \in \left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

d) tanx < 0 khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

2. a) Hàm số xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases}(1+\cos x)(1-\cos x) \geq 0 \\ \cos x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-1 \leq \cos x \leq 1 \\ \cos x \neq 0\end{cases}$.

Vậy hàm số xác định với mọi x trừ x = k2π. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số xác định khi $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{6} + k\pi$

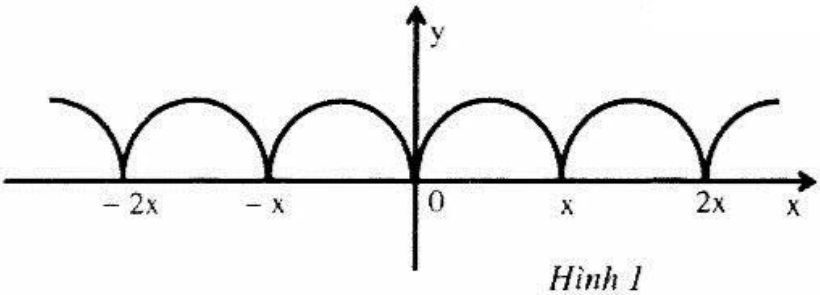
$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) Hàm số xác định khi

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. $y = |\sin x| = \begin{cases}\sin x & \text{với } \sin x \geq 6 \\ -\sin x & \text{với } \sin x < 0\end{cases}$

Như vậy muốn vẽ đồ thị y = | sinx | ta vẽ đồ thị y = sinx, rồi giữ lại phần đồ thị ve sinx ≥ 0, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị với sinx < 0 qua trục hoành. Đồ thị 1: (hình 1)

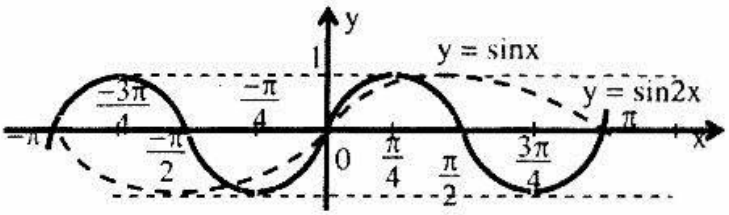


Hình 1

4. Rõ ràng $\sin 2(x + k\pi) = \sin(2x + k2\pi) = \sin 2x$ ($k \in \mathbb{Z}$). Không khó khăn lắm ta chứng minh được hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

$y = f(x) = \sin 2x$;

$f(-x) = \sin(-2x) = \sin 2x = -f(x)$ nên $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ. Nên từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, ta có đồ thị hàm số $y = \sin 2x$ (hình 2).



Hình 2

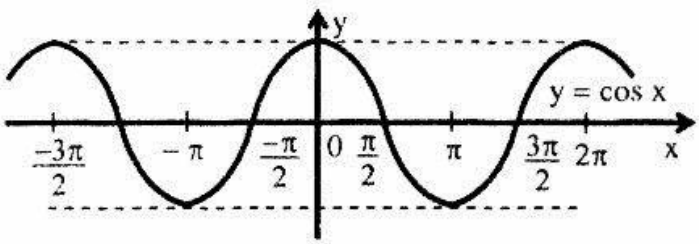
5. $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$ (cắt đồ thị hàm số $y = \cos x$ bởi đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ thì hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$).

6. Dựa vào (hình 2) $y = \sin x > 0$ thì x thuộc các khoảng sau $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ là hình 3.

Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị âm thì :

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right).$$



Hình 3

8. a) $0 \le \cos x \le 1 \Rightarrow y \le 3$.

Vậy GTLN (*) $y = 2\sqrt{\cos x} + 1 = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow y \le 5$.

(*) GTLN : Giá trị lớn nhất

Vậy GTLN $y = 3 - 2\sin x = 5$ khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Hàm số $y = \frac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$ xác định với mọi x hay $D = \mathbb{R}$.

Bài toán dẫn đến tìm miền giá trị của y.

Ta có $y(\cos 3x + 2) = \cos 3x + a\sin 3x + 1 \Leftrightarrow (1 - y)\cos 3x + a\sin 3x = 2y - 1$.

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức $(ab + cd)^2 \le (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$.

Áp dụng bất đẳng thức này ta có: $(2y - 1)^2 \le [(1 - y)^2 + a^2][\cos^2 3x + \sin^2 3x]$

$$(2y - 1)^2 \le (1 - y)^2 + a^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 2y - a^2 \le 0$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \le y \le \frac{1 + \sqrt{1 + 3a^2}}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

10. Chắc chắn có : $\sin A(1 - \sin B) + \sin B(1 - \sin C) + \sin C(1 - \sin A) > 0$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A > 0.$$

Ta cũng có $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \ge 0 \Leftrightarrow$

$$1 - \sin A - \sin B - \sin C + \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A - \sin A\sin B\sin C \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin A\sin B\sin C \ge \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A$$

$$\Leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A < 1, \text{ đpcm.}$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài tập

1. Giải các phương trình:

a) $\sin(x+2)=\frac{1}{3}$; b) $\sin 3x = 1$;

c) $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$; d) $\sin\left(2x+20^0\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số y = sin3x và y = sinx bằng nhau?

3. Giải các phương trình: a) $\cos x(x-1)=\frac{2}{3}$; b) $\cos 3x = \cos 12^0$;

c) $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; d) $\cos^2 2x=\frac{1}{4}$.

4. Giải phương trình: $\frac{2\cos x}{1-\sin 2x}=0$.

5. Giải các phương trình a) $\tan\left(x-15^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}$;

c) cos2x tanx = 0; d) sin3x cotx = 0.

6. Với các giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ và y = tan2x bằng nhau?

7. Giải các phương trình sau và biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác:

a) sin3x − cos5x = 0; b) tan3x tanx = 1.

8*. Giải các phương trình:

a) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$; b) $\sin^2\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{4}+\pi\right)$;

c) 1 + sinx cos3x + sinx + cos3x = 0; d) $\sin^3 x(1-\cot x)-\cos^3 x(1-\tan x)=0$.

Hướng dẫn giải

1. a) $\sin(x+2)=\frac{1}{3}$. Phương trình có nghiệm là:

$$x=-2+\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi;$$

$$x=-2+\pi-\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) $\sin 3x = 1$, vì $1=\sin\frac{\pi}{2}$, nên $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{2}$.

Nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}; k\in\mathbb{Z}$.

c) $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

d) $\sin(2x+20^0)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x+20^0)=\sin(-60^0)$. Vậy ta có:

$$\left[\begin{array}{l}2x+20^0=-60^0+k360^0\\2x+20^0=180^0+60^0+k360^0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-40^0+k180^0\\x=110^0+k180^0\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

2. $\sin 3x=\sin x$. Ta có $\left[\begin{array}{l}3x=x+k2\pi\\3x=\pi-x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$.

3. a) $\cos(x-1)=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x-1=\pm\arccos\frac{2}{3}+k2\pi$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\arccos\frac{2}{3}+k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b) $\cos 3x=\cos 12^0 \Leftrightarrow 3x=\pm 12^0+k360^0 \Leftrightarrow x=\pm 4^0+k120^0, k\in\mathbb{Z}$.

c) $\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$;

$$\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{11\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}\\x=\frac{-5\pi}{18}+k\frac{4\pi}{3}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

d) $\cos^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \pm\frac{1}{2}$;

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

4. Điều kiện của phương trình $1 - \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Với điều kiện này: $\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \left(\text{loại}\right) \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right) \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện của phương trình, phương trình có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

5. a) Điều kiện của phương trình $\cos(x - 15^0) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \cos(x - 15^0) \neq \cos 90^0 \Leftrightarrow x - 15^0 \neq \pm 90^0 + k360^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq 105^0 + k360^0 \\ x \neq -75^0 + k360^0 \end{array}\right.$$

$$\tan\left(x - 15^0\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^0 \Leftrightarrow x = 45^0 + k180^0, \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

b) Điều kiện của phương trình: $\sin(3x - 1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin(3x - 1) \neq \sin 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 \neq 0 + k2\pi \\ 3x - 1 \neq \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \neq \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi + 1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

$$\cot\left(3x - 1\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(3x - 1\right) = \cot\frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 1 = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\cos 2x \tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \tan x = 0 \end{array}\right.$ (Điều kiện của phương trình $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$)